## 2.8.6 Čísla iracionální, čísla reálná

**Předpoklady:** 020805

**Př. 1:** Doplň tabulku (všechny sloupce je možné vypočítat bez kalkulačky).

| $x$ | 0 | 0,0004 | 100 | $\frac{25}{36}$ | 900 | $\frac{100}{81}$ | 1,69 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | | | | | | | | 25 | 0,09 | 0,15 |

| $x$ | 0 | 0,0004 | 100 | $\frac{25}{36}$ | 900 | $\frac{100}{81}$ | 1,69 | 625 | 0,0081 | 0,0225 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | 0 | 0,02 | 10 | $\frac{5}{6}$ | 30 | $\frac{10}{9}$ | 1,3 | 25 | 0,09 | 0,15 |

Hledáme číslo, jehož druhá mocnina se rovná 1,69 - je určitě o něco málo větší než 1 $\Rightarrow$

- 1,1 určitě ne (číslo $1{,}1^2$ končí na $1 \cdot 1 = 1$),
- 1,2 určitě ne (číslo $1{,}2^2$ končí na $2 \cdot 2 = 4$),
- 1,3 je první podezřelý (číslo $1{,}3^2$ končí na $3 \cdot 3 = 9$).

Kontrola: $\begin{array}{r} 1{,}3 \\ \cdot 1{,}3 \\ \hline 39 \\ 13\phantom{0} \\ \hline 1{,}69 \end{array} \Rightarrow \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$.

**Pedagogická poznámka:** Největší problémy jsou s odmocninou z čísla 1,69, kde mají žáci často pocit, že číslo není možné „hezky“ odmocnit (proto upozornění v zadání).

**Př. 2:** Vyber správnou definici druhé odmocniny.

a) Druhá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové číslo *b*, pro které platí $a^2 = b$.

b) Druhá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové nezáporné číslo *b*, pro které platí $b^2 = a$.

c) Druhá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové nezáporné číslo *b*, pro které platí $a = \sqrt{b}$.

d) Druhá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové číslo *b*, pro které platí $b^2 = a$.

a) Druhá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové číslo *b*, pro které platí $a^2 = b$.
Špatná (částečně obrácená) definice. Dosadíme $a = 9$, $b = \sqrt{9} = 3$ $\Rightarrow$ dosadíme do podmínky $a^2 = b$: $9^2 = 3$ $\Rightarrow$ špatně.

b) Druhá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové nezáporné číslo *b*, pro které platí $b^2 = a$.
Správná definice.

- Dosadíme $a = 9$, $b = \sqrt{9} = 3$ $\Rightarrow$ dosadíme do podmínky $b^2 = a$: $3^2 = 9$ $\Rightarrow$ dobře.
- Definice obsahuje podmínku, že odmocnina je nezáporné číslo a je možné ji hledat pouze pro kladná čísla.

c) Druhá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové nezáporné číslo *b*, pro které platí $a=\sqrt{b}$ .

Špatná (částečně obrácená) definice. Dosadíme $a=9$ , $b=\sqrt{9}=3$ $\Rightarrow$ dosadíme do podmínky $a=\sqrt{b}$ : $9=\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ špatně.

d) Druhá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové číslo *b*, pro které platí $b^2=a$ .
Špatná definice. Obsahuje sice správný vzorec pro ověření hodnoty odmocniny, ale neobsahuje požadavek na to, aby odmocnina byla nezáporná.

**Př. 3:** Doplň tabulku.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| poslední číslice čísla | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| poslední číslice jeho druhé mocniny | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| poslední číslice čísla | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| poslední číslice jeho druhé mocniny | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |

**Př. 4:** Tabulku z předchozího příkladu můžeme využít k tomu, abychom zdůvodnili, že druhá odmocnina z žádného přirozeného čísla nemůže být desetinné číslo s konečným počtem desetinných míst. Najdi toto zdůvodnění.

Představíme si, že například platí $\sqrt{2}=1,412....\text{X}$ . Písmenem X jsme si označili poslední nenulovou cifru. Mělo by platit $\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(1,412....\text{X}\right)^2=2$ .
To však není možné. Číslo $\left(1,412....\text{X}\right)^2$ musí mít dvojnásobný počet desetinných míst než číslo $1,412....\text{X}$ , pokud se má rovnat 2 měly by se všechny tyto číslice rovnat 0. Když se však podíváme do tabulky z předchozího příkladu, vidíme, že pro žádnou nenulovou číslici se na konci druhé mocniny čísla 0 neobjeví.

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad zadávám ústně hned po kontrole tabulky. Není moc pravděpodobné, že na řešení přijde větší část žáků, ale skutečnost, že si s tím chvilku lámou hlavu přispívá k tomu, že lépe chápou řešení.

Ukázali jsme si, že $\sqrt{2}$ se nedá vyjádřit jako desetinné číslo s konečným počtem desetinných míst, ale stále zbývá možnost, že je možné ji zapsat jako zlomek (zlomek může mít nekonečné, ale periodické vyjádření desetinným číslem - vyjádření odmocniny na 10 000 desetinných míst však příliš periodicky nevypadalo).

Zkusíme předpokládat, že $\sqrt{2}$ je racionální a jde zapsat jako zlomek v základním tvaru $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, kde *p* a *q* jsou nesoudělná čísla (bez společného dělitele).

$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ $\quad /^2$ (rovnici umocníme)

$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad / \cdot q^2$ (odstraníme zlomek)

$2q^2 = p^2$ číslo $p^2$ je dělitelné dvěma $\Rightarrow$ dělitelné dvěma je i číslo *p* (dvojka v prvočíselném rozkladu čísla $p^2$ musí pocházet z prvočíselného rozkladu čísla *p*, který se v čísle $p^2$ opakuje dvakrát $\Rightarrow$ číslo $p^2$ je tedy dokonce dělitelné čtyřmi) $\Rightarrow$ číslo *p* můžeme napsat jako násobek 2: $p = 2 \cdot k \Rightarrow p^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2$.

$2q^2 = 4k^2 \quad / : 2$

$q^2 = 2k^2$ číslo $q^2$ je dělitelné dvěma $\Rightarrow$ dělitelné dvěma je i číslo *q* (stejná úvaha jako před chvílí u čísla *p*)

Dokázali jsme, že čísla *p* a *q* jsou dělitelná 2 a tím jsme dokázali, že $\sqrt{2}$ je číslo iracionální.

Proč?
Získali jsme totiž spor. Na začátku jsme předpokládali, že $\sqrt{2}$ je racionální a je tedy možné ji zapsat pomocí nesoudělných čísel *p*, *q* jako $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Z tohoto předpokladu jsme však odvodili, že čísla *p*, *q* jsou dělitelná dvěma, což je nesmysl. Není možné, aby z předpokladu,že *p*, *q* jsou nesoudělná čísla, vyplynulo, že mají společného dělitele dvojku $\Rightarrow$ náš prvotní předpoklad, že platí $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ musel být nesprávný a **číslo $\sqrt{2}$ tedy nejde zapsat zlomkem ($\sqrt{2}$ není racionální číslo)**.

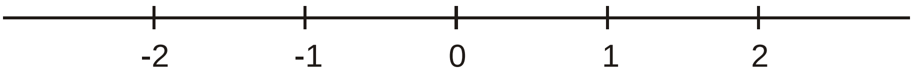
Odmocniny i další čísla, která nemůžeme zapsat jako zlomky, označujeme jako **čísla iracionální**.

**Dodatek:** Předchozí postup označujeme jako důkaz sporem - předpokládáme pravdivost nějakého tvrzení a z toho, že dojdeme z tohoto tvrzení k nesmyslnému závěru, usoudíme, že výchozí tvrzení je nesprávné.

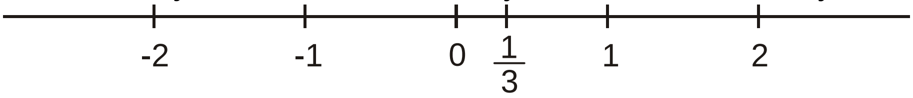
**Dodatek:** Zjištění, že $\sqrt{2}$ není možné vyjádřit pomocí zlomků (a není tedy racionálním číslem), mělo zásadní vliv na vývoj matematiky. K objevu došlo mezi Pythagorejci (řecká matematická škola vedená Pythagorem, podle kterého je pojmenována matematická věta, kterou budeme brzy probírat). Jejich učení spočívalo v tom, že vše je možné vyjádřit pomocí poměrů přirozených čísel (například se jim podařilo tímto způsobem popsat hudební intervaly). Skutečnost, že $\sqrt{2}$ je iracionální, vedla k velkému otřesu v matematice a odklonu od čísel ke geometrii (která byla považována za daleko silnější část matematiky, protože $\sqrt{2}$ vyjádřila snadno jako úhlopříčku ve čtverci o straně 1).
Traduje se, že Pythagorejci objev iracionality čísla $\sqrt{2}$ tajili z obavy ze ztráty prestiže a Hippasos z Metapontu, který jej veřejně vyzradil, byl z jejich společenství vyloučen a snad i utopen v moři.

Jak si tedy máme iracionální číslo jako je $\sqrt{2}$ představit?

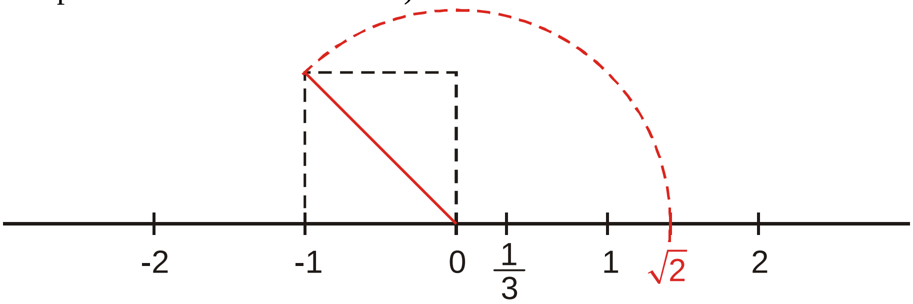
Celá čísla jsme zakreslovali na číselnou osu.




Přidat na číselnou osu racionální čísla nebyl žádný problém: Například obraz čísla $\frac{1}{3}$ jsme získali tak,že jsme vzdálenost mezi čísly 0 a 1 rozdělili na třetiny.

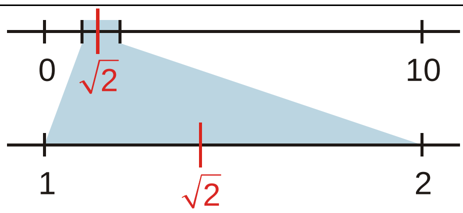
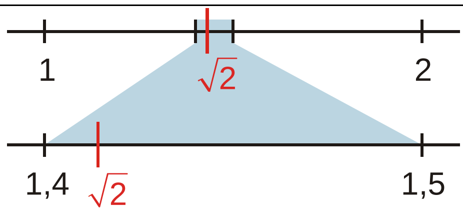
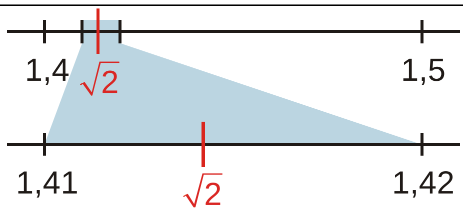


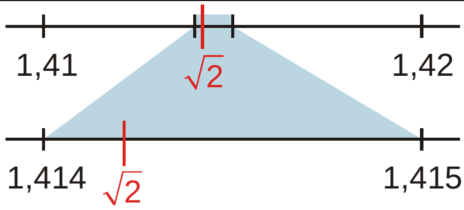

Na osu můžeme pomocí pravítka a kružítka snadno dokreslit i obraz $\sqrt{2}$ (představuje úhlopříčku ve čtverci o straně 1).




**Dodatek:** Skutečnost, že jsme nalezli na číselné ose místo pro $\sqrt{2}$, která nejde vyjádřit pomocí zlomku, má zajímavý důsledek. Ačkoliv mezi čísly 1 a 2 je na ose zobrazeno nekonečně mnoho racionálních čísel, přesto tam zůstává nekonečně mnoho děr, které zaplní právě obrazy čísel iracionálních.

Jak souvisí obraz na číselné ose s pokusem o vyjádření odmocniny z minulé hodiny $\sqrt{2} \doteq 1.41421356237$ ?
Ukazovali jsme si, jak můžeme zpřesňování odhadu kontrolovat pomocí umocňování, sledujeme, co se děje na číselné ose.

| | |
|---|---|
| $1 < \sqrt{2} < 2$<br>protože $1^2 < 2 < 2^2$ |  |
| $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$<br>protože $1,4^2 < 2 < 1,5^2$ |  |
| $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$<br>protože $1,41^2 < 2 < 1,42^2$ |  |

| | |
|---|---|
| $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$<br>protože $1,414^2 < 2 < 1,415^2$ |  |
| ... | ... |

Co jsme zjistili?

- V levém sloupci máme řadu desetinných čísel 1; 1,4; 1,41; 1,414; ..., která jsou menší než přesná hodnota $\sqrt{2}$, ale jejichž hodnota se k hodnotě $\sqrt{2}$ neustále přibližuje (s tím, jak roste počet jejich desetinných míst a tím, jak se tato čísla zvětšují).
- V levém sloupci máme řadu desetinných čísel 2; 1,5; 1,42; 1,415; ..., která jsou větší než přesná hodnota $\sqrt{2}$, ale jejichž hodnota se k hodnotě $\sqrt{2}$ neustále přibližuje (s tím, jak roste počet jejich desetinných míst, a s tím, jak se tato čísla zmenšují).
- Hodnota $\sqrt{2}$ je uzavřena vždy mezi dvojicí těchto čísel a její neurčitost (vzdálenost mezi čísly na ose) velmi rychle klesá (pravý sloupec).

Za číslo $\sqrt{2}$ považujeme číslo, ke kterému "směřuje" rostoucí řada čísel 1; 1,4; 1,41; 1,414; ..., a zároveň i klesající řada čísel 2; 1,5; 1,42; 1,415; ...
Za obraz čísla $\sqrt{2}$ považujeme bod na číselné ose ke kterému se stahují úsečky zakreslené v pravém sloupci.
Hodnotu čísla $\sqrt{2}$ dokážeme určit na libovolný počet desetinných míst (existují i rychlejší postupy než opakované umocňování z minulé hodiny).

**Čísla, která nemůžeme vyjádřit ve formě zlomku (odmocniny, číslo $\pi$, ...), označujeme jako čísla iracionální.**

**Čísla racionální a iracionální tvoří dohromady množinu čísel reálných. Reálná čísla nám umožňují vyjádřit všechny vzdálenosti i čísla k nim opačná.**

**Každý bod na číselné ose je obrazem právě jednoho reálného čísla. Každé reálné číslo můžeme zobrazit na číselné ose právě jedním bodem.**

**Dodatek:** Skutečnost, že není možné zapsat přesnou hodnotu $\sqrt{2}$ jako desetinné číslo není ve skutečnosti žádný problém. Už u čísla $\frac{4}{3}$ jsme řešili stejný problém a řešením bylo, že jsme začali používat zápis postupu $\frac{4}{3}$ (4 děleno třemi) jako přesné vyjádření hodnoty zlomku. Stejně tak můžeme vnímat zápis postupu $\sqrt{2}$ (číslo, jehož druhá mocnina se rovná 2) jako přesný zápis jeho hodnoty a používat tento zápis ve výpočtech.

Při výpočtech se reálnými čísly můžeme používat všechna pravidla, která jsme používali při výpočtech s čísly racionálními. Stejně tak zůstávají v platnosti znaménková pravidla pro násobení a dělení.

**Př. 5:** Vypočti.

a) $\sqrt{11}\cdot 0$ b) $\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}$

a) $\sqrt{11}\cdot 0=0$ b) $\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=3$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}=-1$

**Př. 6:** Jsou dána libovolná reálná čísla *a*, *b* a *c*. Zapiš pomocí těchto čísel.
a) Sčítání reálných čísel je komutativní.
b) Sčítání reálných čísel je asociativní.
c) Násobení reálných čísel je komutativní.
d) Násobení reálných čísel je asociativní.
e) Násobení reálných čísel je distributivní vzhledem ke sčítání.

a) Sčítání reálných čísel je komutativní: $a+b=b+a$.
b) Sčítání reálných čísel je asociativní: $a+\left(b+c\right)=\left(a+b\right)+c$.
c) Násobení reálných čísel je komutativní: $a\cdot b=b\cdot a$.
d) Násobení reálných čísel je asociativní: $a\cdot\left(b\cdot c\right)=\left(a\cdot b\right)\cdot c$.
e) Násobení reálných čísel je distributivní vzhledem ke sčítání: $a\cdot\left(b+c\right)=ab+ac$.

**Př. 7:** Jaká čísla označujeme jako navzájem opačná? Najdi číslo opačné k číslu $3\sqrt{2}$.

Čísla nazýváme navzájem opačné, jestliže se jejich součet rovná nule $\Rightarrow$ číslem opačným k číslu $3\sqrt{2}$ je číslo $-3\sqrt{2}$.

**Př. 8:** Jaká čísla označujeme jako navzájem opačná? Najdi číslo opačné k číslu $-2\sqrt{3}$.

Čísla označujeme jako navzájem převrácená, jestliže se jejich součin rovná 1 $\Rightarrow$ číslem převráceným k číslu $-2\sqrt{3}$ je číslo $-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

**Shrnutí:** Některé odmocniny nejdou vyjádřit zlomkem. Označujeme je jako čísla iracionální.